pensar

# per pensar d'un minut a una hora

**Jordi Deulofeu**
Departament de Didàctica de les Matemàtiques
i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

El *NouBiaix* arriba al número 40, un número ben bonic i força rodó. Què en podem dir? És un nombre compost que té 8 divisors i, per tant, el nombre de divisors és divisor del nombre. La suma dels seus divisors és 90; per tant, és un nombre abundant, és a dir, la suma dels seus divisors propis és major que el nombre. Com a tal, es pot expressar com a suma d'alguns dels seus divisors propis: 20 + 10 + 8 + 2, o bé, 20 + 10 + 5 + 4 + 1, o encara, 20 + 8 + 5 + 4 + 2 + 1, que és la suma de tots els seus divisors propis menys un (el 10). Si el pensem com a nombre figurat, 40 és el quart nombre octogonal; aquests nombres són els que es poden expressar de la forma $3n^2 - 2n$ i corresponen a les successives ampliacions d'un octògon (1, 8, 21 són els tres nombres octogonals anteriors a 40, mentre que 65 i 96 són els posteriors menors que 100); en total, hi ha sis nombres octogonals inferiors a 100. Així mateix, 40 és un nombre regular, també anomenat *nombre de Hamming*, és a dir, un nombre que divideix a 60 o a una potència de 60; aquests nombres tenen com a factors primers 2, 3 i 5 —o alguns d'ells. El nostre nombre d'avui, en base dos, s'escriu 101000, en base vuit, 50, i en base dotze, 34.

El conjunt de problemes de l'article és eclèctic, ja que hi trobarem situacions de joc, tant d'estratègia com de probabilitat, al costat d'altres problemes, un de tipus lògic, un altre de determinació de superfícies i encara un altre corresponent a un repartiment geomètric. Finalment, trobareu un parell d'equacions diofàntiques que per la seva dificultat són autèntics problemes.

Començarem amb un joc que s'ha plantejat a la fase final de la LIII Olimpíada Matemàtica Espanyola, celebrada el 25 de març de 2017 a Alcalá de Henares. Per variar, és un petit (o no tant petit, matemàticament parlant) joc d'estratègia, d'aquells que tant m'agraden i per això us el proposo per iniciar l'article d'avui.

► **Problema 1.** Joc d'estratègia per a dos jugadors. Tenim un tauler format per una fila de 2.018 caselles, numerades de manera consecutiva del 0 al 2017, i posem una sola fitxa a la casella 0. A cada torn cadascun dels dos jugadors mou la fitxa (tots dos la mateixa) i poden fer dues coses: avançar 53 caselles o retrocedir-ne 2. No és possible que, en fer una jugada, algun dels jugadors surti del tauler (ni per sota del 0 ni per sobre del 2017). Guanya la partida el jugador que col·loca la fitxa a la casella 2017. Quin jugador, el primer o el segon, té avantatge? Quina és l'estratègia guanyadora?

Es clar que, tal com està redactat, no és gaire per jugar-hi, sinó per pensar la solució; és a dir, es tracta d'un autèntic problema, com sol passar en aquests concursos. Tanmateix, si el simplifiquem, de manera que es pugui avançar 5 caselles o retrocedir-ne 2 i en lloc d'arribar al 2017 ens conformem a arribar al 23, potser ja tindrem un petit joc practicable del qual podem trobar la solució; i potser el que descobrim per a aquest cas ens ajuda a resoldre l'altre. Com ho veieu? Em consta que en Joan Jareño ha publicat al seu magnífic blog (http://calaix2.blogspot.com.es/) un exhaustiu estudi d'aquest joc-problema.

Dels jocs d'estratègia passem als de probabilitat, concretament a l'elaboració de parelles de daus diferents que donin distribucions de probabilitat iguals.

► **Problema 2.** Sabeu que si tirem una parella de daus «normals» (cúbics i numerats de l'1 al 6) i calculeu la suma, els resultats que van de 2 a 12 no són equiprobables, però obtenim una distribució de la probabilitat simètrica i amb certes propietats interessants. El problema és el següent: és possible trobar una altra parella de daus (cúbics, però numerats diferentment) de manera que, quan els tireu els dos i calculeu la seva suma, els casos siguin els mateixos (és a dir del 2 al 12) i la distribució de la probabilitat també sigui la mateixa? Segur que trobareu una parella de daus que serà solució i a més no tindrà nombres repetits a dins de cada dau; els nombres emprats en cadascun seran consecutius, però no utilitzarà només nombres enters positius. Com a mínim n'hi ha una altra que utilitza nombres enters positius, però, en aquest cas, amb alguna repetició. Aquesta costa una mica més de trobar, però us asseguro que existeix.

El problema següent me l'ha fet conèixer en Francesc Creixell, amb qui he compartit una sessió a Estalmat sobre resolució de problemes. És d'aquells problemes no gaire difícils, però en el quals cal un raonament afinat per tal que la demostració sigui completa. Quan el resolgueu veureu que s'utilitza un conegut principi que permet resoldre molts problemes de demostració similars a aquest.

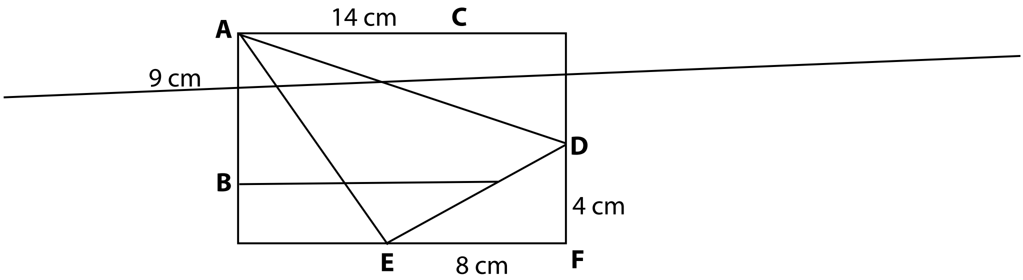
► **Problema 3.** En una celebració, a mesura que van arribant els convidats, es van saludant. Demostra que com a mínim sempre hi haurà dos convidats que hauran saludat exactament el mateix nombre de persones.

Els problemes de repartiments sovint tenen detalls curiosos, tant de tipus aritmètic o algebraic com també geomètric; això darrer és el que succeeix amb el cas que presentem a continuació.

► **Problema 4.** Un repartiment curiós. Dues persones es reparteixen una pizza circular de la manera següent. S'elegeix un punt qualsevol de la pizza i es fa un tall recte que passi per aquest punt; després es fa un altre tall recte, perpendicular a l'anterior que passi pel mateix punt. A continuació es fa un altre tall recte i el seu perpendicular sempre passant pel mateix punt. Amb això tenim la pizza dividida en 8 parts. Ara les dues persones van agafant els trossos alternativament seguint un ordre circular. Com que el nombre de parts és parell, els dos tindran la mateixa quantitat de trossos, però, es pot assegurar que les dues persones tindran la mateixa quantitat de pizza? Generalitzeu el problema per n parts.

El problema següent me l'ha proposat en Guillem Bonet, amb qui he coincidit al seminari sobre resolució de problemes de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) realitzat a Castro Urdiales. Es tracta de trobar l'àrea d'un triangle i d'entrada sembla que no hi hagi prou dades per determinar-la, però ben aviat es veu que tot s'arregla i l'àrea queda ben determinada.

► **Problema 5.** Un problema de geometria. Determineu l'àrea del triangle AED, sabent que el costat AB mesura 9 cm, el costat AC mesura 14 cm, el segment DF mesura 4 cm i el segment EF mesura 8 cm.




Acabarem l'article amb un parell de qüestions relacionades amb les equacions diofàntiques, aquelles en les quals es consideren tan sols les soluciones enteres. Totes dues són per a mi autèntics problemes; la primera, perquè hi ha una via directa relacionada amb la divisibilitat per demostrar la inexistència de solucions i que evita la necessitat d'intentar resoldre-la. La segona per la seva dificultat, molt més gran del que pot semblar a primera vista, i perquè, com l'anterior, té una manera de resoldre-la utilitzant una heurística similar a assaig i error que s'allunya dels mètodes estàndards de resolució d'aquest tipus d'equacions.

► **Problema 6.** A) Demostreu que l'equació $X^2 + Y^2 = 4Z + 3$ no té cap solució $(X, Y, Z)$ amb valors enters. B) Trobeu valors per a $X$, $Y$, $Z$, enters positius, tals que: $X/(Y + Z) + Y/(X + Z) + Z/(X + Y) = 4$.

Espero que passeu una bona estona resolent alguns, o potser tots, d'aquests problemes de temàtica tan variada.